



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 07.02.2026

CLASA a XI- a

Problema 1 (22,5p)

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2026 \\ 2026 & 1 & 1013 \cdot 2027 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(R)$.

a) Arătați că dacă $X \in M_3(R)$ verifică relația $AX = XA$, atunci există $m, n, p \in R$ astfel

$$\text{încât } X = \begin{pmatrix} m & 0 & n \\ n & m & p \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

b) Determinați $X \in M_3(R)$ astfel încât $X^{2026} = A$.

Problema 2 (22,5p)

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ cu $x_0 = 0$ și $x_{n+1} = x_n + a + \sqrt{b + 4ax_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde $a, b > 0$. Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n^2}$.

G.M. nr. 9/2024

Problema 3 (22,5p)

Se consideră matricele

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } X(a) = I_3 + aA, \text{ unde } a \in \mathbb{C}^*, k \in \mathbb{N}^*.$$

a) Demonstrați că $X(a) \cdot X(b) = X((k+1)ab + a + b)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{C}^*, k \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se calculeze $(X(a))^n, n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 4 (22,5p)

Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \dots \cdot \cos 2^n x}{(x - \pi)^2}, n \in \mathbb{N}^*$.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.

Se acordă 10 puncte din oficiu